الإمتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2011

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والإمتحانات

مادة الرياضيات
مسلك العلوم الرياضية أ و ب
المعامل 9
مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,0 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

نضع : $\mathbb{A}^0=\mathbb{I}$ و $\mathbb{A}^1=\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2=\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: \mathbb{A}^{n+1}=\mathbb{A}^n\times\mathbb{A}$

0,50 ن	① بين أن : $\forall k\in\mathbb{N}: \mathbb{A}^{2k}=\mathbb{I}$
0,50 ن	② بين أن المصفوفة $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا $\mathbb{A}^{-1}$ ينبغي تحديده.

(II) ليكن α عددا حقيقيا .

لكل x و y من المجال $I=]\alpha,+\infty[$ نضع : $x*y=(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

0,50 ن	① أ) بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I
0,50 ن	ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي
0,50 ن	ج) بين أن المجموعة $(I,*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده
0,50 ن	② بين أن المجموعة $(I,*)$ زمرة تبادلية

③ نعتبر التطبيق :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \qquad x \longrightarrow \frac{1}{x-\alpha}$$

0,50 ن	أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.
0,50 ن	ب) حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)}=a^3+a$ بحيث : $x^{(3)}=x*x*x$

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N=\underbrace{111\ldots11}_{\text{2010 مرة 1}}$

0,25 ن	① بين أن N يقبل القسمة على العدد 11
0,75 ن	② أ) تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010}-1=9N$
0,50 ن	ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$
0,50 ن	ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N .
0,50 ن	③ بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 .

التمرين الثالث : (3,5 ن) الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m):\ z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4=0$$

0,50 ن ① تحقق أن العدد $z_1=2-m$ حل للمعادلة (E_m) .

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

0,50 ن (أ) بين أن $z_1z_2=1 \quad \Leftrightarrow \quad im^2+2(1-i)-3=0$

1,00 ن (ب) حدد قيمتي m بحيث $z_1z_2=1$

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث :

و الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$.

0,25 ن ① (أ) بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1

0,25 ن (ب) بين أن : $z''=iz+2$.

② نفترض أن النقطة M تخالف O أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

0,50 ن (أ) أحسب $\frac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$

0,50 ن (ب) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة.

التمرين الرابع : (6,5 ن)

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $(E)\ :\ e^x=x^n$ بحيث $n\in\mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D}=[0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x}\ ;x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,25 ن ① تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $\left(e^x=x^n \Leftrightarrow n=f(x)\right)$.

0,50 ن ② بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.

1,50 ن ③ أحسب النهايات التالية ثم أوّل هندسيا النتائج المحصل عليها :

$$\lim_{x\to1^-}f(x) \quad و \quad \lim_{x\to1^+}f(x) \quad و \quad \lim_{x\to+\infty}f(x) \quad و \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

0,75 ن ④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها.

0,50 ن ⑤ بين أن $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتيها.

0,50 ن ⑥ أنشيء المنحنى $(\mathcal{C})$

0,50 ن ⑦ بين أنه إذا كان $n\geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1<\alpha_n<e<b_n$.

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq3}$ و $(b_n)_{n\geq3}$.

① بين أن $b_n \geq n\ :\ (\forall n \geq 3)$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq3}$	0,50 ن
② Ⓐ بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .	0,50 ن
ب بين أن $(\forall n \geq 3):\ \frac{1}{n} < ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq3}$.	0,50 ن
ج بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = e$	0,50 ن

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

① أ بين أن : $(\forall x \geq 0)\ :\ \ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$.	0,50 ن
ب بين أن : $(\forall x \geq 1)\ :\ \ e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.	0,50 ن
② بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ و أن : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)\ :\ (\forall x \geq 0)$.	0,50 ن
③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ بما يلي : $\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$	
أ بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.	0,25 ن
ب بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $]0,+\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ و أن $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$. (يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$)	0,75 ن
④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$	
أ بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.	0,50 ن
ب استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F .	0,50 ن